

Control law for a robot network formation using static diffusive coupling

Salvador Durazo-Acevedo¹, A.Y. Aguilar-Bustos², E. Bugarin²

1 Tecnológico Nacional de México

2 División de Estudios de Posgrado e Investigación, Tecnológico Nacional de México

Abstract

This article describes a control proposal for a formation objective of a robot network in collaborative work with static diffusive coupling using tools derived from graph theory. This proposal is guaranteed by the stability theory of Lyapunov and it is validated with results in simulation and experimentation. As an important part of this work, it is detailed like a tutorial the procedure for the formulation of the robot network addressed and also it is proposed a formation control law with procedure for non-collision between the robots that form the network using the same network topology.

OPEN ACCESS

Published: 03/01/2018

Accepted: 08/05/2017

Submitted: 13/12/2016

DOI:
10.23967/j.rimni.2017.7.002

Keywords:

Formación de redes de robots
acoplamiento difusivo estático
teoría de estabilidad de
Lyapunov
validación experimental
no colisión

1. Introducción

Desde principios del presente siglo se han incrementado notablemente los esfuerzos por coordinar y sincronizar grupos de robots que forman redes para el trabajo colaborativo. Estas *Redes de Robots* (RR's) se justifican en misiones que no son posibles llevarlas a cabo con robots actuando de forma individual por razones de su propia capacidad. Entre los aspectos de estudio de mayor interés destaca la propuesta de *leyes de control* que gobiernen el comportamiento colectivo. Para muchas misiones de estas RR's, la etapa primaria es su *formación* con un patrón geométrico o una distribución determinada [1]. La formación consiste en un posicionamiento relativo espacial con respecto a una o más referencias, fijas o móviles, para cada uno de los robots que forman parte de la red [2]. Para este problema de formación se han utilizado distintas metodologías [2-8]. La mayor parte de estas metodologías se fundamenta en la teoría de grafos cuyos inicios están documentados desde el siglo XVIII y que en la década de 1960 se extiende para aplicaciones en redes complejas [9-15]. Mediante la teoría de grafos es posible expresar interacciones entre sistemas dinámicos de manera general y organizada, facilitando la formulación de leyes de control para gobernar el comportamiento entero de una red.

Dentro del campo de la teoría de grafos y redes complejas, el *acoplamiento difusivo estático* es una estrategia ampliamente utilizada para realizar la interconexión entre los nodos (robots) de la red [16,17]. El principio de acoplamiento difusivo estático es un esquema de retroalimentación constante [17] entre los robots que forman parte de la red, pudiendo ser esta conectividad global o parcial (respectivamente: todos los robots

se conectan con el resto de robots o sólo parte de ellos). La retroalimentación consiste en insertar como parte de la entrada del sistema dinámico del robot una señal que es la diferencia entre las variables de salida del robot de interés y las variables de salida del resto de robots en la red [18]. De este tipo de acoplamiento se han derivado distintas metodologías con el propósito de forzar una respuesta deseada en los robots, denominada estado de *sincronía* [14]; ó bien, una respuesta de sincronía natural, denominada *consenso* [19-21]. Una modalidad de estrategia de control que destaca para redes de gran dimensión es el control *pinning* (líderes referentes), que propone una acción de control en sólo un reducido número de sistemas dinámicos de la red y que inducen a la red entera hacia un estado de sincronía [11,14-15,22]. Estas estrategias se pueden llevar a cabo tanto mediante el control centralizado como con el control distribuido [23]. Con el control centralizado el procesamiento reside en un procesador que se encarga de monitorear las variables de estado de cada robot y de comunicar las acciones de control necesarias para alcanzar el objetivo de movimiento. Con el control distribuido el procesamiento reside en dos o más procesadores con acceso total o parcial a la información de variables de estado de la red; típicamente los robots llevan sus procesadores a bordo.

La formación de robots es aún un problema abierto [3-5], especialmente para RR's de gran dimensión y RR's heterogéneas. Las redes heterogéneas de robots están integradas por robots con distintos modelos dinámicos, con distintas dimensiones de vectores de variables de estado, con distinta dimensión de variables de salida o una combinación de las condiciones anteriores [16,17]. Las soluciones propuestas aún son parciales y requieren una integración para resolver

problemas íntimamente relacionados. Tales problemas, además de los ya mencionados, son la evasión de obstáculos, la no colisión entre robots, las saturaciones en los accionamientos para el control, la diversidad de escenarios y las limitaciones en los enlaces de comunicación para el control [14-15].

Las contribuciones del presente trabajo se aplican en la *formación* de una RR's utilizando herramientas derivadas de la teoría de grafos. Estas contribuciones son: (i) un tutorial para la formulación de RR's mediante el acoplamiento difusivo estático en el que se describen de manera detallada los elementos y variables que intervienen en la red, (ii) una ley de control para una formación deseada de la RR's bajo esta formulación y (iii) un procedimiento para la no colisión entre los robots que forman la red utilizando la misma topología de la RR's. La metodología desarrollada se ejemplifica con simulaciones y experimentos mediante la construcción de una red de *Robots Móviles Terrestres a base de Ruedas* (RMTR's).

El resto de este documento está organizado como sigue. En la sección 2 se expone un tutorial que describe paso a paso la formulación de una RR's basado en el modelo para cada i -ésimo robot que forma parte de la red y la estrategia de acoplamiento difusivo estático. En la sección 3 se propone la ley de control para la formación de una red de robots construida con robots tipo unicycle. La efectividad de la ley de control se demuestra utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov. En la sección 4 se presentan los resultados de simulación y experimentación. En la sección 5 se describe un procedimiento para evitar las colisiones entre robots de la red ejemplificada en la sección 4 y se presentan resultados de simulación y experimentación. Finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones generales.

2. Formulación de una red de robots

En esta sección se describe a manera de tutorial una metodología para la formulación de una RR's. En la sección 2.1 se presenta el modelo de *un robot individual*. En la sección 2.2 se describe el modelo del i -ésimo robot R_i en una red de robots considerando la contribución de todos los robots que pertenecen a la red sobre las entradas de dicho robot. En la sección 2.3 se muestra un esquema de red general de robots. En la sección 2.4 se explican los elementos necesarios para la formulación de una red de robots mediante el acoplamiento difusivo estático y la sección 2.5 expone un ejemplo detallado para la formulación de una red de robots con la estrategia descrita.

2.1 Modelo de un robot individual

El modelo de un robot individual resulta por lo general en una o más ecuaciones diferenciales no lineales que pueden expresarse de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),\end{aligned}\quad (1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ es el vector de variables de estado, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ es el vector de variables de salida, t denota la variable tiempo continuo, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de variables de entrada. $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$ y $\mathbf{h}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^s$ son funciones continuas. En la Figura 1 se muestra el diagrama a bloques de un robot individual en correspondencia con (1).

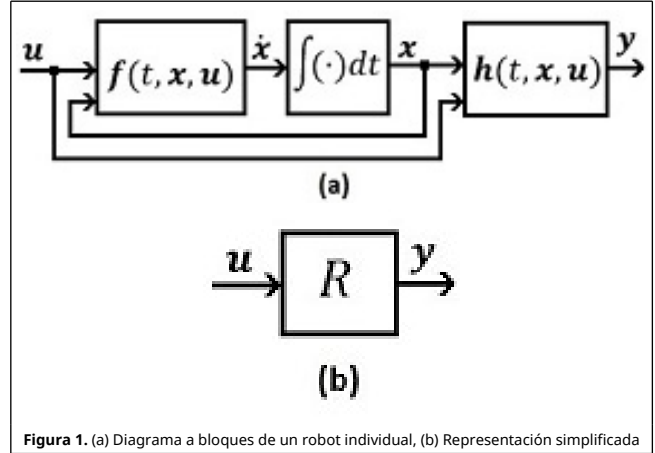


Figura 1. (a) Diagrama a bloques de un robot individual, (b) Representación simplificada

2.2 Modelo del i -ésimo robot en una red de robots

Para un robot R_i que pertenece a una red se puede proponer un nuevo vector de entrada $\boldsymbol{\vartheta}_i \in \mathbb{R}^{p_{\boldsymbol{\vartheta}_i}}$, de manera que su modelo quedaría como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{h}_i(t, \mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{Y}_i(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\vartheta}_i),\end{aligned}\quad (2)$$

donde $\mathbf{Y}_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{p_{\boldsymbol{\vartheta}_i}} \rightarrow \mathbb{R}^{p_i}$ es un mapeo de \mathbf{y} y $\boldsymbol{\vartheta}_i$ hacia el vector de excitación \mathbf{u}_i con \mathbf{y} la concatenación de vectores de variables de salida de cada robot de la red, $s = \sum_{i=1}^N s_i$ y N la cantidad de robots que integran la red. La Figura 2 muestra el modelo de (2) de manera simplificada.

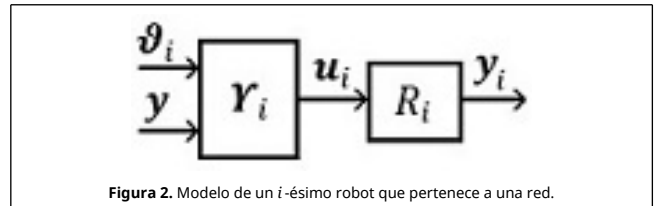


Figura 2. Modelo de un i -ésimo robot que pertenece a una red.

2.3 Modelo de una red de robots

En consecuencia, de acuerdo a (2), la Figura 3 muestra el diagrama a bloques de una red de robots.

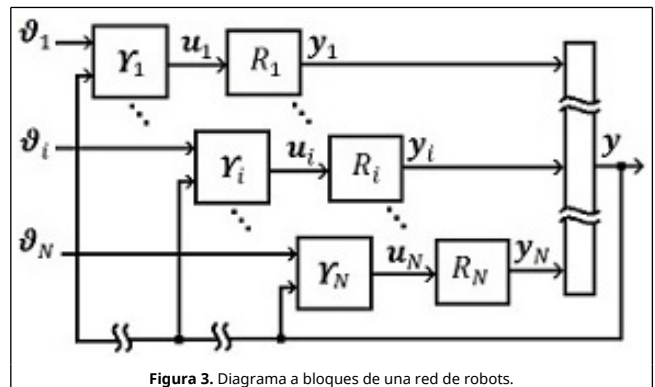


Figura 3. Diagrama a bloques de una red de robots.

2.4 Estrategia de acoplamiento difusivo estático

Una red de robots también puede ser expresada mediante el conjunto de robots y de conexiones que la conforman mediante

$$G = (R, \varepsilon), \quad (3)$$

donde $R = \{R_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ es el conjunto de N robots y $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{y}_j) : i, j = 1, 2, \dots, N\}$ es el conjunto de $N \times N$ conexiones dirigidas de la red. Una conexión dirigida $\varepsilon_{ij}(\mathbf{y}_j) \in \mathbb{R}^{p_i}$ es una función que corresponde a un par de robots (R_i, R_j) siendo la salida $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^{s_j}$ (salida del robot R_j) el vector de información que se transfiere al robot R_i mediante una transformación $\varepsilon_{ij} : \mathbb{R}^{s_j} \rightarrow \mathbb{R}^{p_i}$. La Figura 4 muestra las conexiones dirigidas de manera generalizada para un par de robots R_i y R_j .

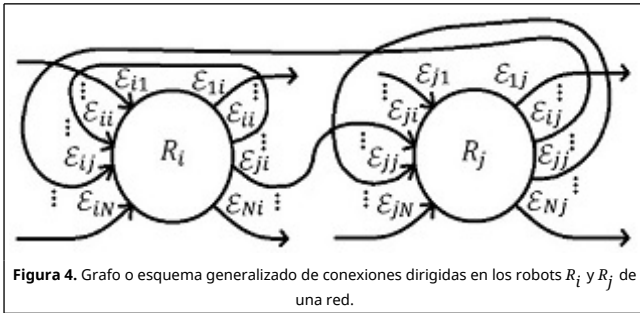


Figura 4. Grafo o esquema generalizado de conexiones dirigidas en los robots R_i y R_j de una red.

De esta forma, una estrategia común para la construcción de la función \mathbf{Y}_i relacionada con (2) [11,15-17], corresponde a un sistema lineal de acoplamiento difusivo estático donde el conjunto de conexiones de todos los robots respecto al robot R_i se expresa como

$$\varepsilon_i(\mathbf{y}) = c \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}(\mathbf{y}_j), \quad (4)$$

donde $c > 0$ es la denominada fuerza global de acoplamiento, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{y}_j) = g_{ij} \Gamma_{ij} \mathbf{y}_j$, con g_{ij} elemento de la matriz de configuración externa de red $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$ obtenida mediante

$$G = A - \Delta_{ent}, \quad (5)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de adyacencia ponderada con sus elementos $a_{ij} > 0$ si existe una conexión entre el robot R_i y el robot R_j y $a_{ij} = 0$ si no existe la conexión (a_{ij} es la magnitud de la conexión y en particular $a_{ii} = 0$); $\Delta_{ent} = \text{diag}\{d_{ii}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la

matriz de grado de entrada con $d_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ la suma de los pesos

de las conexiones que ingresan a cada robot R_i (note que de esta forma G es difundida puesto que la suma de sus elementos por renglón es nula); y $\Gamma_{ij} \in \mathbb{R}^{p_i \times s_j}$ es la matriz de configuración interna que expresa las proporciones de contribución de las variables de salida \mathbf{y}_j hacia \mathbf{u}_i y en consecuencia, define la relación interna entre las variables del robot R_j hacia las variables del robot R_i .

De esta manera el acoplamiento difusivo estático para generar \mathbf{u}_i es

$$\mathbf{u}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma_{ij} \mathbf{y}_j + \mathbf{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

donde se ha considerado en forma aditiva la nueva entrada de control \mathbf{d}_i . La Figura 5 muestra el diagrama a bloques para una red formulada utilizando la estrategia (6), mientras que la Figura 6 presenta el esquema generalizado de conexiones dirigidas equivalente.

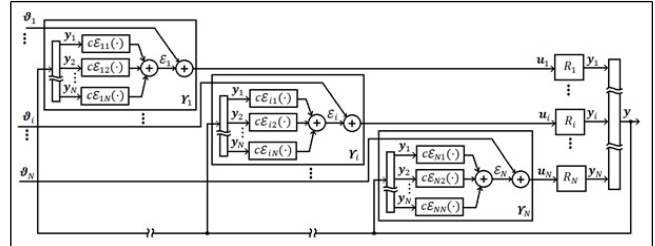


Figura 5. Diagrama a bloques para una red de robots con acoplamiento difusivo estático.

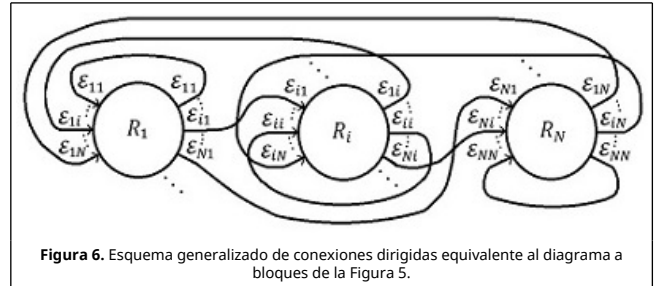


Figura 6. Esquema generalizado de conexiones dirigidas equivalente al diagrama a bloques de la Figura 5.

2.5 Ejemplo de formulación de una RR's con acoplamiento difusivo estático

Ejemplo 2.1: Considérese la topología descrita en el grafo de la Figura 7 con los 4 robots distintos (red heterogénea) mostrados en la Figura 8.

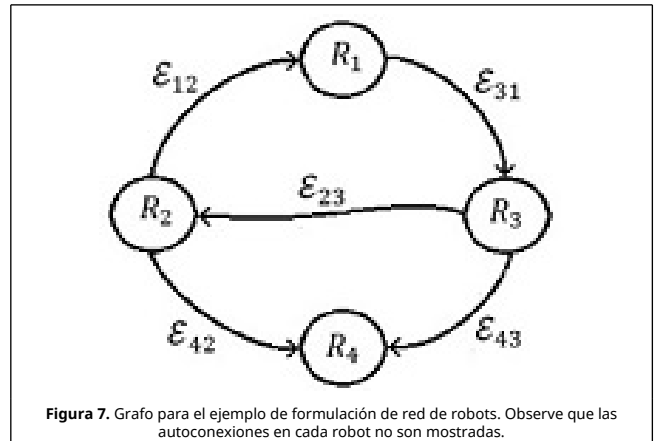
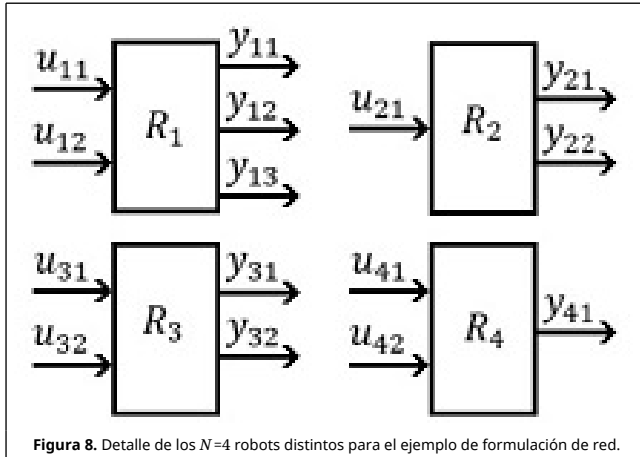


Figura 7. Grafo para el ejemplo de formulación de red de robots. Observe que las autoconexiones en cada robot no son mostradas.



Considere las siguientes magnitudes de conexión: $a_{12} = 3$, $a_{23} = 4$, $a_{31} = 2$, $a_{42} = 5$ y $a_{43} = 1$; tal que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \Delta_{ent} = \text{diag}\{3, 4, 2, 6\}.$$

De este modo, según (5), la matriz de conexión externa resulta

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ahora bien, la matriz de matrices de configuración interna debe ser

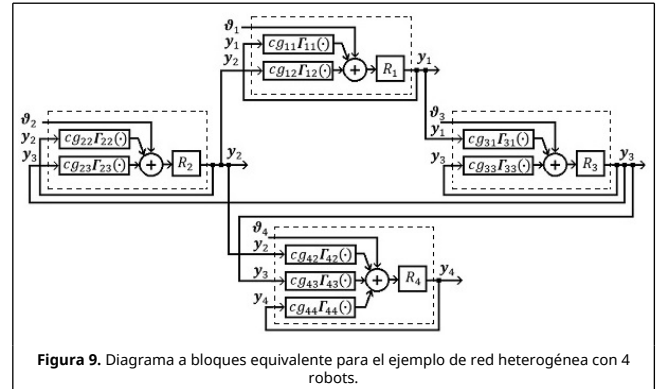
$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 \\ \Gamma_{31} & 0 & \Gamma_{33} & 0 \\ 0 & \Gamma_{42} & \Gamma_{43} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (8)$$

con $\Gamma_{ij} \in \mathbb{R}^{r_i \times s_j}$ cada matriz de configuración interna y con 0 una matriz cero de dimensión adecuada; es decir

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11,11} & \gamma_{11,12} & \gamma_{11,13} \\ \gamma_{11,21} & \gamma_{11,22} & \gamma_{11,23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gamma_{12,11} & \gamma_{12,12} \\ \gamma_{12,21} & \gamma_{12,22} \\ \gamma_{22,11} & \gamma_{22,12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{23,11} & \gamma_{23,12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_{31,11} & \gamma_{31,12} & \gamma_{31,13} \\ \gamma_{31,21} & \gamma_{31,22} & \gamma_{31,23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gamma_{33,11} & \gamma_{33,12} \\ \gamma_{33,21} & \gamma_{33,22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gamma_{42,11} & \gamma_{42,12} \\ \gamma_{42,21} & \gamma_{42,22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gamma_{44,11} \\ \gamma_{44,21} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (9)$$

con cada $\gamma_{ij,kl} \geq 0$ según la proporción de contribución de las variables y_j hacia u_i .

De esta manera, se completa (6) para la red de la Figura 7 y la Figura 9 muestra su diagrama a bloques equivalente



3. Formación de una red de robots

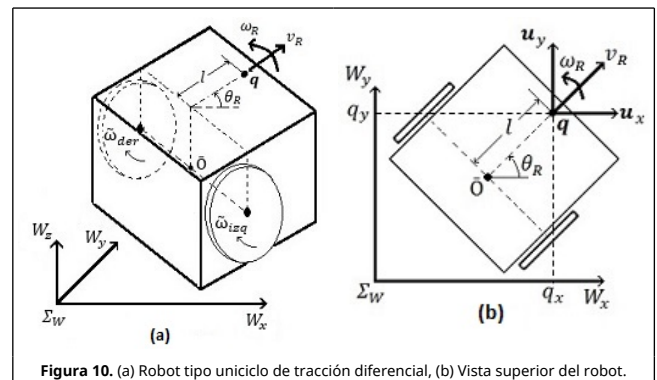
En esta sección se presenta la propuesta para la formación de una red de robots construida con RMTR's tipo unificado de tracción diferencial como el que se muestra en la Figura 10. Los robots se han modelado para expresar la cinemática de un punto objetivo $q = [q_x \ q_y]^T \in \mathbb{R}^2$ colocado en la parte superior del robot, centrado en referencia al eje que une sus ruedas en el punto \bar{O} pero desplazado una distancia l en dirección perpendicular a dicho eje (ver Figura 10). La cinemática de tal punto objetivo puede expresarse como [24]

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) & -l \sin(\theta_R) \\ \sin(\theta_R) & l \cos(\theta_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} = \Lambda(\theta_R) \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde θ_R denota la orientación del robot en referencia al marco global Σ_W, v_R es la variable de entrada correspondiente a la velocidad lineal del robot y ω_R su otra variable de entrada correspondiente a su velocidad angular. Note que $\Lambda(\theta_R)$ es invertible si $l \neq 0$, de manera que si esto se cumple (10) en forma simplificada quedaría

$$\dot{q} = u. \quad (11)$$

donde $u = [u_x \ u_y]^T = \Lambda(\theta_R)[v_R \ \omega_R]^T$ representa el vector de entrada correspondiente a las velocidades lineales en direcciones W_x y W_y como se muestra en la Figura 10(b). La ecuación (11) es el modelo de nuestro robot individual, significando que en relación a (1): $x = q, f(t, x, u) = u, y = q$ y $h(t, x, u) = x = q$.



Ahora, considérense N robots en red con acoplamiento difusivo estático con dinámica (11), de tal modo que para el i -ésimo robot sería

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{u}_i, \quad (12)$$

y de acuerdo a (6)

$$\mathbf{u}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{q}_j + \boldsymbol{\vartheta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

donde se ha sustituido $\mathbf{y} = \mathbf{q}$ y $\Gamma_{ij} = \mathbf{I}_2$ por ser una red homogénea.

El objetivo de formación se propone como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_i(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

donde $\mathbf{e}_i = [e_{ix} \ e_{iy}]^T = \mathbf{q}_i - \mathbf{s} - \boldsymbol{\varphi}_i$ es el error de formación y se ha insertado un líder virtual (sistema de referencia de red) con sistema dinámico $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s})$ y un vector de posiciones finales deseadas constantes $\boldsymbol{\varphi}_i = [\varphi_{ix} \ \varphi_{iy}]^T \in \mathbb{R}^2$ para cada i -ésimo robot respecto al líder. El vector $\mathbf{s} = [s_x \ s_y]^T$ puede ser un punto fijo o una trayectoria [11]. La derivada de \mathbf{e}_i es $\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{s}}$ o bien sustituyéndole (12)

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{u}_i - \dot{\mathbf{s}}. \quad (15)$$

3.1 Ley de control propuesta

La ley de control propuesta para el objetivo de formación es

$$\boldsymbol{\vartheta}_i = -c d_i \mathbf{e}_i - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \boldsymbol{\varphi}_j + \dot{\mathbf{s}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

donde d_i es la ganancia del controlador para el i -ésimo robot. Así (13), luego de sustituirle (16) resulta

$$\mathbf{u}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{q}_j - c d_i \mathbf{e}_i - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \boldsymbol{\varphi}_j + \dot{\mathbf{s}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

Ya que $\mathbf{q}_j = \mathbf{e}_j + \mathbf{s} + \boldsymbol{\varphi}_j$ y que la matriz \mathbf{G} es difundida, la dinámica (15) del error $\dot{\mathbf{e}}_i$ resulta

$$\dot{\mathbf{e}}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{e}_j - c d_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (18)$$

y en forma matricial (ver Apéndice A)

$$\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{F}\mathbf{e}, \quad (19)$$

donde $\dot{\mathbf{e}} = [\dot{e}_1^T \ \dot{e}_2^T \ \dots \ \dot{e}_N^T]^T$, $\mathbf{F} = c(\mathbf{D} - \mathbf{G}) \otimes \mathbf{I}_2$, $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ y \otimes expresa el producto Kronecker [26].

3.2 Punto de equilibrio y prueba de estabilidad

Para demostrar el cumplimiento del objetivo de formación (14) con la ley de control (16) en el sistema expresado por (13)-(12), considérense los siguientes lemas:

Lema 1 [25]. Un sistema homogéneo $\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, posee una solución única (la solución trivial $\mathbf{y} = 0$) si y sólo si el $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$.

Lema 2 [26]. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con valores singulares $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ con valores singulares $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_s > 0$. Entonces $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ (ó $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$) tiene rs valores singulares $\sigma_1 \delta_1 \geq \dots \geq \sigma_r \delta_s > 0$ y $\text{rank}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})\text{rank}(\mathbf{B})$. NOTA: Si las matrices son cuadradas puede intercambiarse "valores singulares" por "valores característicos".

Lema 3 [27]. Sea $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz cuadrada y haciendo $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{P} + \mathbf{P}^T]$, el Teorema de Sylvester establece que \mathbf{P} es definida positiva ($\mathbf{P} > 0$) si y sólo si:

$$\Delta_1 = \det[a_{11}] > 0, \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \Delta_N = \det[\mathbf{A}] > 0.$$

NOTA: Si \mathbf{P} es definida positiva ($\mathbf{P} > 0$) entonces $-\mathbf{P}$ es definida negativa ($-\mathbf{P} < 0$). Si \mathbf{P} es semidefinida positiva ($\mathbf{P} \geq 0$) entonces $-\mathbf{P}$ es semidefinida negativa ($-\mathbf{P} \leq 0$).

Lema 4 [28]. Sean $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices definidas (semidefinidas) positivas, entonces $\mathbf{P} \otimes \Gamma \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ es una matriz definida (semidefinida) positiva.

Ahora, considere el punto de equilibrio $\mathbf{e} = 0$ de (19) y, para el análisis de su estabilidad, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} > 0 \ \forall \mathbf{e} \neq 0, \quad (20)$$

por lo que la derivada temporal de \mathbf{V} es

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}}. \quad (21)$$

Tomando $\dot{\mathbf{e}}$ de (19) y sustituyendo en (21) se tiene

$$\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{e}^T \mathbf{F} \mathbf{e}. \quad (22)$$

De manera que si $\mathbf{F} > 0$ entonces $\dot{\mathbf{V}} < 0 \ \forall \mathbf{e} \neq 0$, significando que $\mathbf{e} = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable y con esto queda demostrado el cumplimiento del objetivo de formación (14).

Como ejemplos considérense las siguientes topologías típicas para una red con N robots.

Ejemplo 3.1: La red direccionada y no ponderada (magnitud de conexión unitaria) de la Figura 11 en configuración estrella con el robot R_1 en la raíz. Su matriz de configuración externa resulta

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Propóngase

$$\mathbf{D} - \mathbf{G} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

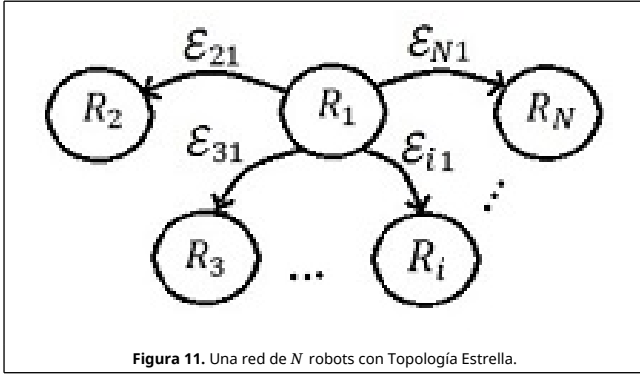


Figura 11. Una red de N robots con Topología Estrella.

Se ha considerado $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, 0, \dots, 0\}$ ya que el robot en la raíz (R_1) de la red es el único viable para ser líder, pues es el único que mantiene conexiones direccionadas con el resto de los robots. Obsérvese que (24) es una matriz triangular, por lo que si $d_1 \neq 0$ su rango es completo ($\text{rank}(\mathbf{D} - \mathbf{G}) = N$). De esta manera, si $d_1 \neq 0$ y apoyándonos en los Lemas 1 y 2, $\mathbf{e} = 0$ es el único punto de equilibrio de (19).

Ahora, partiendo de (24) y aplicando el Lema 3 con $\mathbf{A} = [(\mathbf{D} - \mathbf{G}) + (\mathbf{D} - \mathbf{G})^T]/2$ se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

de forma que $\Delta_1 = d_1$ ($\Delta_1 > 0$ si $d_1 > 0$), $\Delta_2 = d_1 - \frac{1}{4}$ ($\Delta_2 > 0$ si $d_1 > \frac{1}{4}$), ..., $\Delta_i = d_1 - \frac{i-1}{4}$ ($\Delta_i > 0$ si $d_1 > \frac{i-1}{4}$), ..., $\Delta_N = d_1 - \frac{N-1}{4}$ ($\Delta_N > 0$ si $d_1 > \frac{N-1}{4}$).

De manera que apoyándonos en el Lema 4, entonces si

$$d_1 > \frac{N-1}{4}, \quad (26)$$

entonces $\mathbf{F} > 0$; cumpliéndose el objetivo de formación (14) de forma global.

Ejemplo 3.2: La red direccionada y no ponderada de la Figura 12 en configuración anillo. Su matriz de configuración externa resulta

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Propóngase

$$\mathbf{D} - \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1+d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1+d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1+d_{N-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1+d_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1+d_N \end{bmatrix} \quad (28)$$

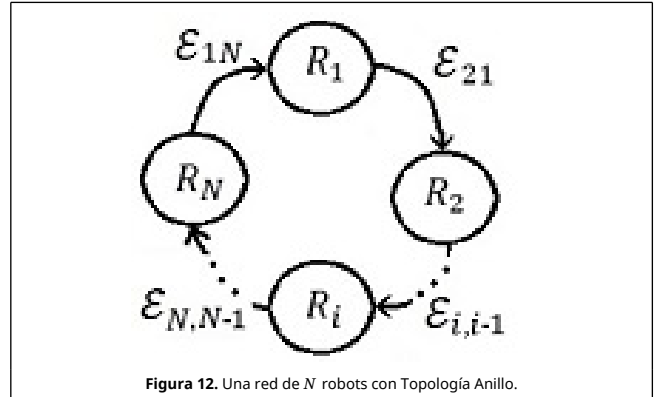


Figura 12. Una red de N robots con Topología Anillo.

Nótese que $\text{rank}(\mathbf{G}) = N - 1$ (lo cual puede comprobarse directamente al aplicar el procedimiento de eliminación de Gauss). Para que $\text{rank}(\mathbf{D} - \mathbf{G})$ sea completo, por la simetría de la topología, resulta suficiente cualquier $d_i \neq 0$. Supóngase $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, 0, \dots, 0\}$ de manera que si $d_1 \neq 0$ y apoyándose en los Lemas 1 y 2, $\mathbf{e} = 0$ es el único punto de equilibrio de (19).

Ahora, sustituyendo la \mathbf{D} supuesta en (28) y aplicando el Lema 3 con $\mathbf{A} = [(\mathbf{D} - \mathbf{G}) + (\mathbf{D} - \mathbf{G})^T]/2$ se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+d_1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

de forma que $\Delta_i = a d_1 + b$, donde $a = \frac{i}{2^{i-1}}$ para $i = 1, 2, \dots, N$, $b = \frac{(i+1)}{2^i}$ para $i = 1, 2, \dots, N-1$ y $b = 0$ para $i = N$, siendo cada $\Delta_i > 0$ si $d_1 > 0$. Por lo tanto, apoyándonos en el Lema 4, entonces si $d_1 > 0$ se cumple que $\mathbf{F} > 0$ y el objetivo de formación (14) es satisfecho de forma global.

Ejemplo 3.3: La red direccionada y no ponderada de la Figura 13 en configuración malla. Su matriz de configuración externa resulta

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & N-1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Propóngase

$$\mathbf{D} - \mathbf{G} = \begin{bmatrix} N-1+d_1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1+d_2 & \ddots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & N-1+d_N \end{bmatrix} \quad (31)$$

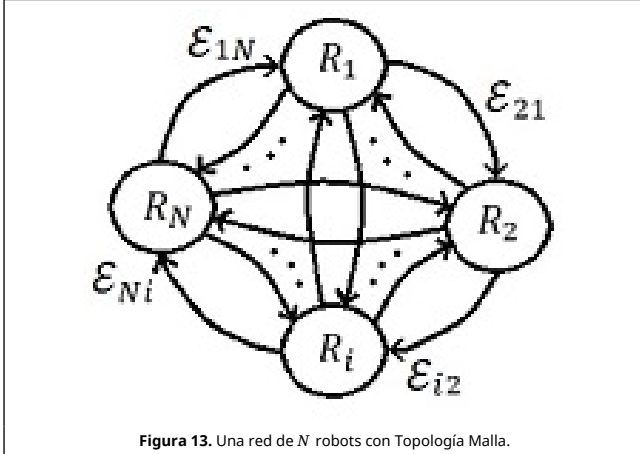


Figura 13. Una red de N robots con Topología Malla.

Nótese que $\text{rank}(\mathbf{G}) = N - 1$ (lo cual puede comprobarse al aplicar el procedimiento de eliminación de Gauss). Para que $\text{rank}(\mathbf{D} - \mathbf{G})$ sea completo resulta suficiente cualquier $d_i \neq 0$. Supóngase $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, 0, \dots, 0\}$ de manera que si $d_1 \neq 0$ y apoyándose en los *Lemas 1 y 2*, $e = 0$ es el único punto de equilibrio de (19).

Ahora, sustituyendo la \mathbf{D} supuesta en (31) y aplicando el *Lema 3* con $\mathbf{A} = [(\mathbf{D} - \mathbf{G}) + (\mathbf{D} - \mathbf{G})^T]/2$ se tiene

$$\mathbf{D} - \mathbf{G} = \begin{bmatrix} N-1+d_1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1 & \ddots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & N-1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

donde $\Delta_i = (N^{i-1} - (i-1)N^{i-2})d_1 + N^i - iN^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$. De manera que para que cada $\Delta_i > 0$, $d_1 > \frac{(iN^{i-1} - N^i)}{(N^{i-1} - (i-1)N^{i-2})} =$

$N(i-N)/(N-i+1)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, es decir, $d_1 > 0$. Por lo tanto, apoyándonos en el *Lema 4*, entonces si $d_1 > 0$ se cumple que $F > 0$ y el objetivo de formación (14) es satisfecho de forma global.

4. Simulación y experimento

4.1. Caso particular de una red con 5 robots tipo unicycle

La Figura 14 muestra una RR's direccionada, no típica y no ponderada, compuesta por cinco robots tipo unicycle con dinámica de sus puntos objetivo (12) y para la cual resulta su matriz de configuración externa

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} & g_{34} & 0 \\ 0 & g_{42} & g_{43} & g_{44} & 0 \\ 0 & 0 & g_{53} & 0 & g_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

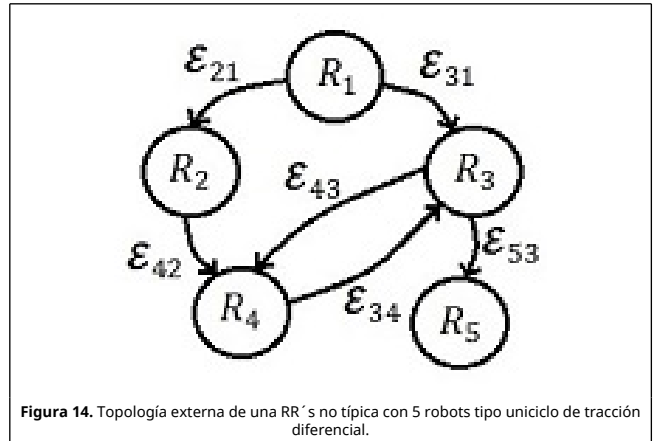


Figura 14. Topología externa de una RR's no típica con 5 robots tipo unicycle de tracción diferencial.

Nótese que $\text{rank}(\mathbf{G}) = N - 1$ ya que su renglón 1 es nulo. Se propone la matriz $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, 0, \dots, 0\}$ debido a que R_1 tiene trayectorias direccionadas hacia el resto de los robots. Para que $\text{rank}(\mathbf{D} - \mathbf{G})$ sea completo resulta suficiente $d_1 \neq 0$ (lo que se comprueba con el procedimiento de eliminación de Gauss) y apoyándose en los *Lemas 1 y 2*, $e = 0$ es el único punto de equilibrio de (19).

Ahora, aplicando el *Lema 3* en $\mathbf{D} - \mathbf{G}$ con $\mathbf{A} = [(\mathbf{D} - \mathbf{G}) + (\mathbf{D} - \mathbf{G})^T]/2$ se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde resulta

$$\Delta_1 = d_1 (\Delta_1 > 0 \text{ si } d_1 > 0), \Delta_2 = d_1 - \frac{1}{4} (\Delta_2 > 0 \text{ si } d_1 > \frac{1}{4}), \Delta_3 = 2d_1 - \frac{3}{4}, (\Delta_3 > 0 \text{ si } d_1 > \frac{3}{8}), \Delta_4 = \frac{5}{2}d_1 - \frac{23}{16} (\Delta_4 > 0 \text{ si } d_1 > \frac{23}{40}) \text{ y } \Delta_5 = \frac{33}{16}d_1 - \frac{21}{16} (\Delta_5 > 0 \text{ si } d_1 > \frac{21}{33}).$$

Por lo tanto, apoyándonos en el *Lema 4*, entonces si $d_1 > \frac{21}{33}$ se cumple que $F > 0$ y el objetivo de formación (14) es satisfecho de forma global.

4.2. Simulación y experimento

Para la simulación de la red formada por cinco robots se utilizó MATLAB R2011b. El experimento se realizó con cinco robots tipo unicycle modelo YSR-A de la empresa Yujin que reciben las consignas de velocidad mediante módulos de comunicación

inalámbrica operando a 418 MHz y a una tasa de 19.2 Kbps. Los módulos de comunicación se conectan a un procesador central vía puerto serie. Este procesador central ejecuta una aplicación de tiempo real en ambiente RTLinux, auxiliado de una tarjeta de video Leonardo de la empresa Arvo y con programación basada en [33]. Para efectos de identificar la postura de los robots se colocaron dos puntos marca sobre cada robot, uno para la posición objetivo y el otro como auxiliar para el cálculo de su orientación. Las imágenes se registran mediante una cámara UF-1000CL de la empresa UNIQ cuyo eje óptico apunta perpendicularmente al plano de movimiento de los robots (ver Figura 10). La cámara es de alta velocidad y se configuró a razón de 200 cuadros por segundo, obteniéndose un periodo estricto de muestreo en los experimentos de 0.005 s.

En la Tabla 1 se muestran las condiciones iniciales y posiciones finales deseadas para el control de formación de la red de la Figura 14; utilizando un líder virtual con dinámica $\dot{s} = 0$ y con condición inicial $s(0) = [0 \ 0]^T$ m, una fuerza global de acoplamiento $c = 1.8$, ganancias $D = \text{diag}\{2 \ 0 \ 0 \ 0\}$ y una distancia $l = 0.036$ m entre marcas sobre cada robot. Obsérvese que se desea una formación en línea recta con un ángulo de $\pi/4$ rad respecto al marco global Σ_W .

Tabla 1. Condiciones de simulación y experimentación para la RR's de la Figura 14.

i	$q_{ix}(0)$ [m]	$q_{iy}(0)$ [m]	$\theta_i(0)$ [rad]	ϕ_{ix} [m]	ϕ_{iy} [m]
1	0.1511	0.2286	-1.1802	0.30	0.30
2	0.4243	0.0891	-1.1310	0.15	0.15
3	-0.2135	-0.0247	-0.7598	0	0
4	0.0496	-0.0717	-0.3286	-0.15	-0.15
5	0.1259	-0.2499	2.8198	-0.30	-0.30

La Figura 15(a) muestra la evolución de los errores en simulación, los cuales tienden a cero a medida que el tiempo transcurre. Una apreciación visual simple destaca que es suficiente $t \approx 5$ s para que el error pueda considerarse prácticamente cero. En la Figura 15(b) se presentan las gráficas de los errores en el experimento. Cabe destacar que el umbral de reacción de los robots se encuentra por encima de 0.0156 m/s de manera que debajo de dicho valor no hay movimiento del robot. Lo anterior es lo que justifica que en el experimento exista un error en estado estacionario, es decir, cuando la ley de control demanda velocidades pequeñas (pues el robot está cerca del objetivo) se cae dentro del umbral de no reacción del robot deteniendo su movimiento. La norma de error más grande lo presenta R_5 con $\|e_5\| = 0.0105$ m.

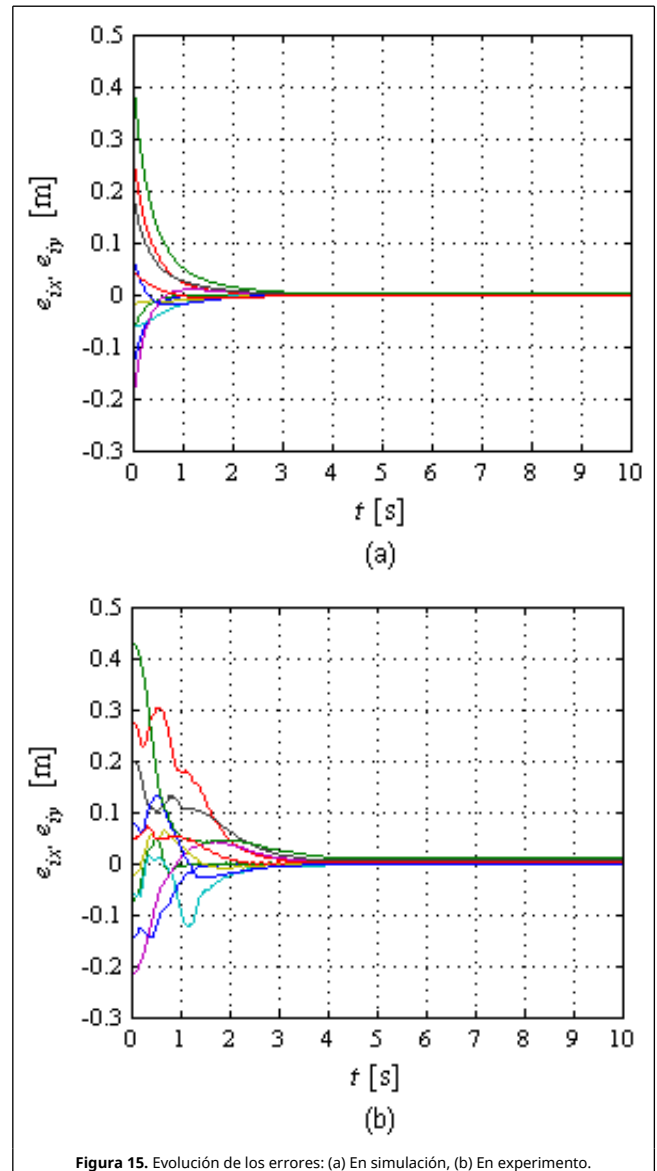


Figura 15. Evolución de los errores: (a) En simulación, (b) En experimento.

La Figura 16 muestra las trayectorias seguidas por los robots. Las trayectorias experimentales descritas difieren un tanto de las trayectorias simuladas, esto debido a factores no modelados, como deslizamientos, derrapes y umbrales de reacción. El objetivo final, sin embargo, se alcanza satisfactoriamente.

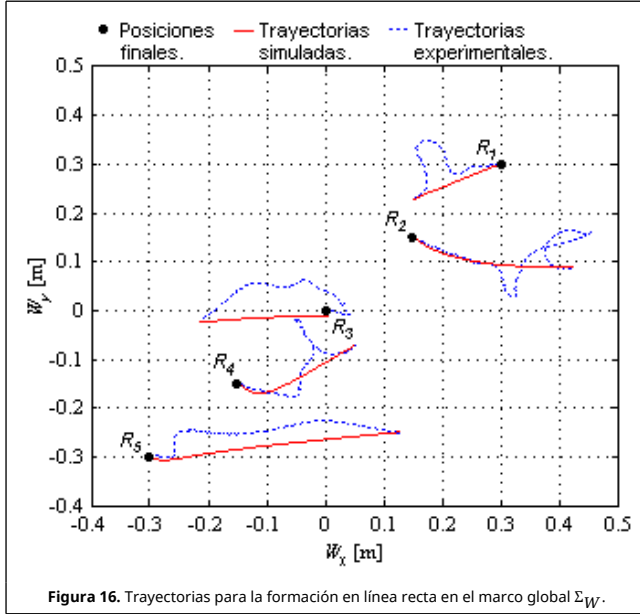


Figura 16. Trayectorias para la formación en línea recta en el marco global Σ_W .

Las gráficas en las Figuras 17 y 18 muestran respectivamente la evolución de las velocidades lineales (v_{R_i}) y angulares (ω_{R_i}) de los robots en simulación (17(a) y 18(a)) y en experimentación (17(b) y 18(b)). Las trayectorias experimentales muestran que luego de $t \approx 4$ s permanece un pequeño valor constante v_{R_i} y un pequeño valor oscilatorio ω_{R_i} incapaces de causar movimiento práctico en los robots.

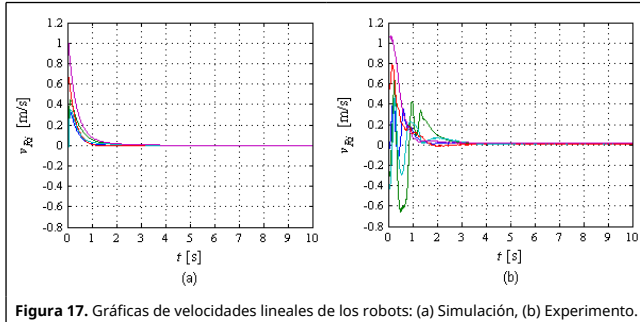


Figura 17. Gráficas de velocidades lineales de los robots: (a) Simulación, (b) Experimento.

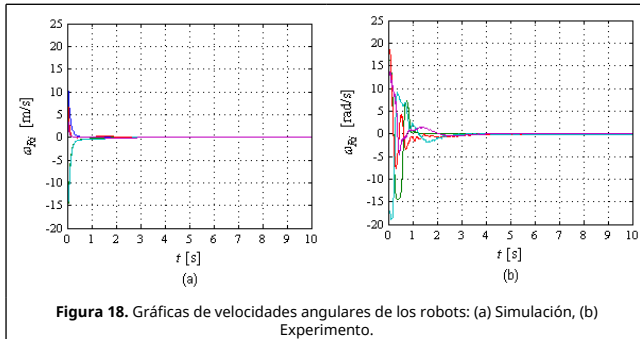


Figura 18. Gráficas de velocidades angulares de los robots: (a) Simulación, (b) Experimento.

5. Ley de control con procedimiento para evitar colisiones

La evasión de obstáculos y la no colisión entre los robots de una red aún es un problema abierto, especialmente cuando se tiene un número elevado de robots en áreas reducidas. En la literatura pueden encontrarse estudios que abordan esta problemática [24,29-32].

5.1. Ley de control

Se propone que la ley de control (16) contenga además, en forma aditiva, una acción de repulsión $u_{ri} \in \mathbb{R}^2$ como procedimiento para evitar colisiones entre los robots. Para el planteamiento formulado en la Sección 3, la propuesta, inspirada en [31], es la siguiente (la cual incluye el vector adicional de acciones de control $U_r = [u_{r1}^T u_{r2}^T \dots u_{rN}^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$):

$$\dot{\mathbf{q}}_i = -c d_i \mathbf{e}_i - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \varphi_j + \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{u}_{ri}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (35)$$

donde $\mathbf{u}_{ri} = h_i [-e_{iy} \ e_{ix}]^T$ con $h_i \in \mathbb{R}$ un factor de repulsión. De esta manera (13) resulta

$$\mathbf{u}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} \varphi_j - c d_i \mathbf{e}_i - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \varphi_j + \dot{\mathbf{s}} + h_i [-e_{iy} \ e_{ix}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (36)$$

Manteniendo como objetivo el control de formación expresado por (14), la derivada del error es

$$\dot{\mathbf{e}}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{e}_j - c d_i \mathbf{e}_i + h_i [-e_{iy} \ e_{ix}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (37)$$

Obsérvese que $\mathbf{e}_i = 0$ sigue siendo un punto de equilibrio. Ahora, considérese la función candidata de Lyapunov (20) y su derivada (21), entonces para este caso \dot{V} puede escribirse como

$$\dot{V} = -c \mathbf{e}^T \{[\mathbf{D} - \mathbf{G}] \otimes \mathbf{I}_2\} \mathbf{e} + c \mathbf{e}^T [\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_2] \mathbf{e}^\perp, \quad (38)$$

donde $\mathbf{H} = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ y $\mathbf{e}^\perp = [-e_{1y} \ e_{1x} \ -e_{2y} \ e_{2x} \ \dots \ -e_{Ny} \ e_{Nx}]^T$.

La contribución $c \mathbf{e}^T [\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_2] \mathbf{e}^\perp$ en (38) es

$$\begin{aligned} c \mathbf{e}^T [\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_2] \mathbf{e}^\perp &= c \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{2x} \\ e_{2y} \\ \vdots \\ e_{Nx} \\ e_{Ny} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_{1y} \\ e_{1x} \\ -e_{2y} \\ e_{2x} \\ \vdots \\ -e_{Ny} \\ e_{Nx} \end{bmatrix} \\ &= c \{ -h_1 e_{1x} e_{1y} + h_1 e_{1x} e_{1y} - h_2 e_{2x} e_{2y} + h_2 e_{2x} e_{2y} \dots - \\ &\quad h_N e_{Nx} e_{Ny} + h_N e_{Nx} e_{Ny} \} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

y (38) resulta equivalente a (22). Con esto se demuestra que el objetivo de formación (14) se sigue satisfaciendo.

5.2. Cálculo de la matriz de repulsión H

Considérese la Figura 19 en la que se representa el plano Σ_W de movimiento de los robots. Obsérvese la posición final deseada φ_i para el punto objetivo \mathbf{q}_i del robot R_i , y obsérvese el punto objetivo \mathbf{q}_j del robot R_j . El espacio físico que ocupa cada robot se delimita por un círculo de radio r . Ahora note el punto $\mathbf{O}_{ij} \in \mathbb{R}^2$ a una distancia $2r$ de la posición del robot R_j sobre la

línea que une los puntos q_i y q_j , el cual expresa la mínima distancia permitida al robot R_i para no colisionar con el robot R_j ; es decir

$$\mathbf{O}_{ij} = \mathbf{q}_j + 2r \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}. \quad (40)$$

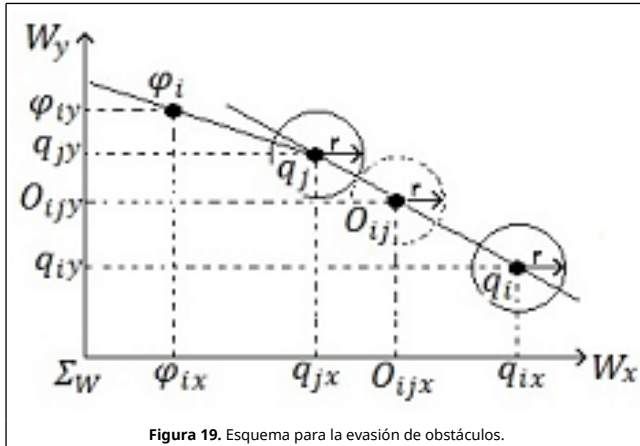


Figura 19. Esquema para la evasión de obstáculos.

Considérese además una matriz $\mathbf{H}_r \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con componentes del factor de repulsión $h_{ij} > 0$ (para $i, j = 1, 2, \dots, N$ con $i \neq j$) si existe una trayectoria direccionada desde R_j hasta R_i , tal que el robot R_i disponga de la información de las variables de salida del robot R_j de forma directa o a través de otro robot en dicha trayectoria; $h_{ij} = 0$ en caso contrario. Los elementos $h_{ii} = 0$ (los componentes del factor de repulsión en la diagonal de \mathbf{H}_r son nulos). De esta manera, los componentes no nulos del factor de repulsión estarían dados por

$$h_{ij} = \frac{\alpha \tanh(\lambda \{q_{iy} - L(q_{ix})\} \{\varphi_{ix} - q_{jx}\})}{\|q_i - O_{ij}\| + \sigma}, \quad (41)$$

donde $\alpha, \lambda > 0$ son ganancias para ponderar la magnitud de la repulsión, σ es un escalar positivo (muy pequeño sólo para evitar singularidades) y $L(q_{ix})$ es la evaluación en el punto q_{ix} de la ecuación de la línea recta que une los puntos \mathbf{p}_i y \mathbf{q}_i ; es decir

$$L(q_{ix}) = \frac{\varphi_{iy} - q_{jy}}{\varphi_{ix} - q_{jx}}(q_{ix} - q_{jx}) + q_{jy}. \quad (42)$$

Finalmente, los elementos de la diagonal en la matriz \mathbf{H} son

$$h_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N.$$

5.3. Simulación y experimento considerando el procedimiento para evitar colisiones

Considérese la red mostrada en la Figura 14 y descrita en la Sección 4.2, de tal forma que su matriz de componentes del factor de repulsión es

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & 0 & h_{34} & 0 \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & 0 & 0 \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

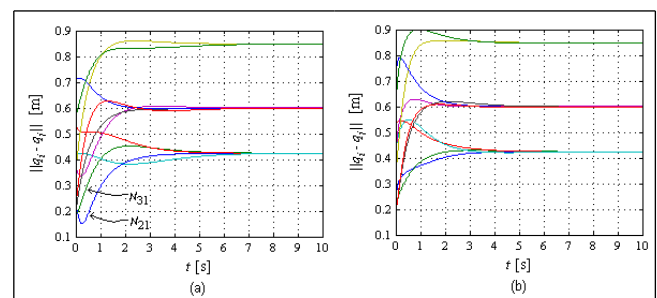
Por lo que la matriz $\mathbf{H} = \text{diag}\{0, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ donde $h_2 = h_{21}$, $h_3 = h_{31} + h_{32} + h_{34}$, $h_4 = h_{41} + h_{42} + h_{43}$ y $h_5 = h_{51} + h_{52} + h_{53} + h_{54}$.

En la Tabla 2 se muestran las condiciones iniciales y posiciones finales deseadas. Para el control de esta red se utilizó un líder virtual fijo en el origen del marco global, una fuerza global de acoplamiento $c = 1.25$, ganancia $\mathbf{D} = \text{diag}\{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$, $\alpha = 0.25$, $\lambda = 12$ y $\sigma = 0.001$. El radio de delimitación r fue igual a 0.1 m, el cual incluye una tolerancia de 0.02 m.

Tabla 2. Condiciones de simulación y experimentación para la RR's de la Figura 14 que incluye la ley con procedimiento para la no colisión.

i	$q_{ix}(0)$ [m]	$q_{iy}(0)$ [m]	$\theta_i(0)$ [rad]	φ_{ix} [m]	φ_{iy} [m]
1	-0.1955	0.1706	0.0568	0	0
2	-0.0390	-0.0020	-0.0267	0.3	0.3
3	-0.1620	0.3492	-3.0882	-0.3	0.3
4	-0.1135	-0.3512	3.0847	-0.3	-0.3
5	0.0261	-0.1846	-0.0542	0.3	-0.3

En el proceso de simulación y experimentación se han calculado las normas de separación $N_{ij} = \|q_i - q_j\|$ entre todos los robots con la finalidad de apreciar el desempeño del procedimiento para evitar colisiones en conjunto con la ley para la formación. La Figura 20 presenta las magnitudes de las normas N_{ij} de separación. Debe esperarse que ninguna norma resulte menor a $2(r - 0.02) = 0.16$ m. En la Figura 20(a), obtenida mediante simulación sin incluir el procedimiento para evitar colisiones, se muestra que existe un conflicto de colisión entre los robots R_1 y R_2 (en algún momento $N_{21} < 0.16$ m). La Figura 20(b), también mediante simulación, muestra que este conflicto se elimina al incluir la acción para la no colisión. Nótese además que entre R_1 y R_3 existe una condición inicial cercana a $2(r - 0.02)$ sin causar colisión en la evolución de las trayectorias de los robots. La Figura 20(c), obtenida mediante el experimento, muestra que con las ganancias utilizadas se resuelve la colisión entre R_1 y R_2 y no se genera ninguna otra colisión.



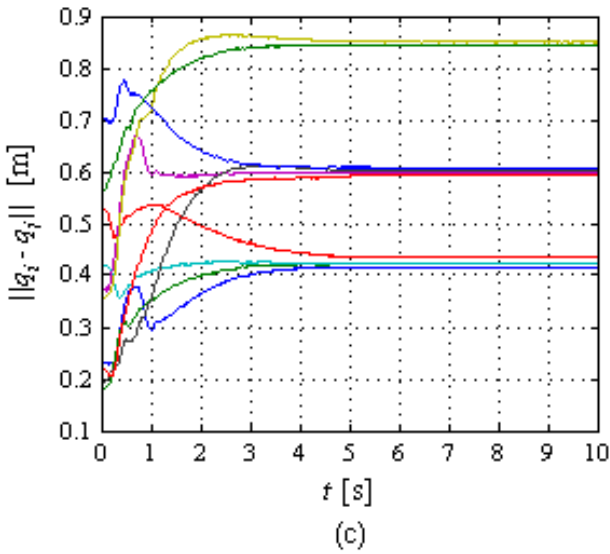


Figura 20. Normas $\|q_i - q_j\|$: (a) Simulada sin incluir el procedimiento para evitar colisiones, (b) Simulada incluyendo el procedimiento para evitar colisiones y (c) Experimento incluyendo el procedimiento para evitar colisiones.

La Figura 21 grafica la evolución de los errores de formación. La Figura 21(a) muestra el comportamiento de la evolución de los errores en simulación y sugiere un tiempo de $t \approx 8$ s para alcanzar prácticamente el objetivo de formación fijado. La Figura 21(b) presenta la gráfica obtenida mediante el experimento.

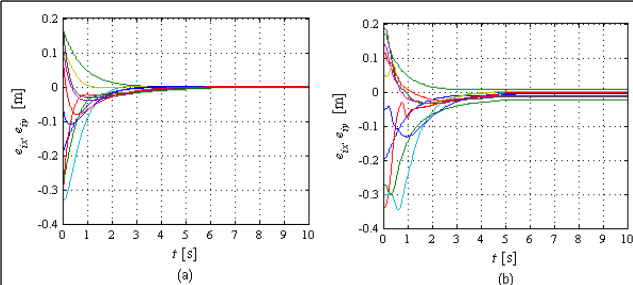


Figura 21. Evolución de los errores: (a) En simulación, (b) En el experimento.

En la Figura 22 se observan las posiciones iniciales y finales para cada robot; así como las trayectorias seguidas por cada uno de ellos. En la Figura 22(a) se muestran las trayectorias en simulación sin incluir la ley para la no colisión. En la Figura 22(b) se presentan las trayectorias de los robots cuando se incluye la ley para la no colisión, obsérvese que en el experimento el robot R_1 no sigue una línea recta (como en la simulación) debido a que se hace presente la acción para no colisionar con el robot R_3 , mismo que describe una trayectoria en arco para evitar colisionar tanto con el robot R_1 como con el robot R_2 . El movimiento inicial del robot R_2 en dirección opuesta a su posición final deseada se debe a la dependencia con los estados de R_1 , que al acercarse a R_2 incrementa la acción de no colisión en este último. En general, las trayectorias de los cinco robots han sufrido cambios con la ley de no colisión en virtud de la naturaleza de la repulsión entre todos ellos. Para las trayectorias de este experimento y de igual manera que para las de la Figura 16, es notable el logro en una medida satisfactoria del objetivo propuesto.

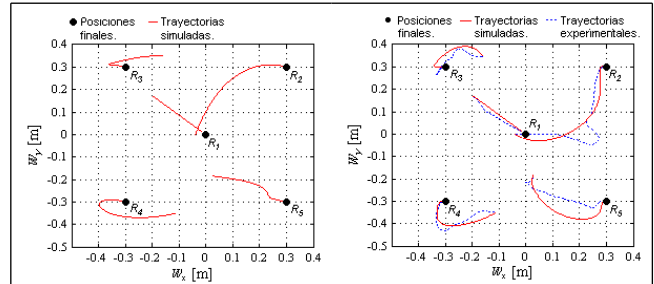


Figura 22. (a) Trayectorias para la formación simuladas sin incluir el procedimiento para evitar colisiones, (b) Trayectorias para la formación en simulación y experimentación incluyendo el procedimiento para evitar colisiones.

6. Conclusiones

Se ha presentado un tutorial para formular una red de robots mediante la estrategia de acoplamiento difusivo estático, típica en teoría de grafos. Se ha propuesto una ley de control para lograr el objetivo de formación de una red homogénea de robots utilizando la metodología descrita. Se ha realizado la experimentación para demostrar la validez de la ley de control propuesta y se ha demostrado el cumplimiento del objetivo de formación mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov. Se ha particularizado en la inserción de la ganancia de control en tan solo un robot que recibe la información de estados de un líder virtual con la condición de que exista una trayectoria direccionada desde tal robot hacia todos los robots restantes de la red. Finalmente, utilizando la misma topología externa de la red se ha propuesto y validado experimentalmente el objetivo de formación con procedimiento para evitar colisiones entre los robots.

Apéndice A

Detalle de la forma matricial de \dot{e}

Para $i = 1, 2, \dots, N$ y de acuerdo a (15) se tiene

$$\dot{e}_i = u_i - \dot{s},$$

y considerando (13)

$$\dot{e}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} q_j + \vartheta_i - \dot{s}.$$

Ahora, sustituyéndole la ley de control propuesta (16) tenemos (note que $q_j = e_j + s + \varphi_j$)

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= c \sum_{j=1}^N g_{ij} q_j - c d_i e_i - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \varphi_j + \dot{s} - \dot{s}, \\ &= c \sum_{j=1}^N g_{ij} (e_j + s + \varphi_j) - c d_i e_i - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \varphi_j, \\ &= c \sum_{j=1}^N g_{ij} e_j + c \sum_{j=1}^N g_{ij} s + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \varphi_j - c d_i e_i - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \varphi_j, \\ &= c \sum_{j=1}^N g_{ij} e_j + c \sum_{j=1}^N g_{ij} s - c d_i e_i. \end{aligned}$$

Dado que G es difundida

$$\dot{e}_i = c \sum_{j=1}^N g_{ij} e_j - c d_i e_i.$$

El desarrollo de \dot{e}_i para $i = 1, 2, \dots, N$ es

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= c \{g_{11}e_1 + g_{12}e_2 + \dots + g_{1N}e_N\} - c d_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= c \{g_{21}e_1 + g_{22}e_2 + \dots + g_{2N}e_N\} - c d_2 e_2, \\ &\vdots \\ \dot{e}_N &= c \{g_{N1}e_1 + g_{N2}e_2 + \dots + g_{NN}e_N\} - c d_N e_N,\end{aligned}$$

ó bien en forma matricial

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_N \end{bmatrix} &= c \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \dots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} - \\ &c \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \\ &= c \left(\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \dots & g_{NN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_N \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y dado que el acoplamiento corresponde a una red homogénea con $\Gamma_{ij} = I_2$ para $i, j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e}_{11} \\ \dot{e}_{12} \\ \dot{e}_{21} \\ \vdots \\ \dot{e}_{N2} \end{bmatrix} &= c \left(\begin{bmatrix} g_{11}I_2 & g_{12}I_2 & \dots & g_{1N}I_2 \\ g_{21}I_2 & g_{22}I_2 & \dots & g_{2N}I_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1}I_2 & g_{N2}I_2 & \dots & g_{NN}I_2 \end{bmatrix} - \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} d_1I_2 & 0I_2 & \dots & 0I_2 \\ 0I_2 & d_2I_2 & \dots & 0I_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0I_2 & 0I_2 & \dots & d_NI_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{N2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e}_{11} \\ \dot{e}_{12} \\ \dot{e}_{21} \\ \vdots \\ \dot{e}_{N2} \end{bmatrix} &= c \left(\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \dots & g_{NN} \end{bmatrix} - \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_N \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{N2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

que resulta en

$$\dot{e} = c((G - D) \otimes I_2)e,$$

es decir

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -c((D - G) \otimes I_2)e, \\ &= -Fe. \blacksquare\end{aligned}$$

Agradecimientos

Se agradece el apoyo financiero del Tecnológico Nacional de México, del Instituto Tecnológico de Ensenada, del PRODEP y del CONACYT (Proyecto 166654).

Referencias

- [1] T. M. Cheng, A. V. Savkin, Decentralized control of multi-agent systems for swarming with a given geometric pattern, Computers and Mathematics with Applications, 61(4) (2011) 731-744.
- [2] H. García, B. Jayawardhana, M. Cao, Distributed Rotational and Translational Maneuvering of Rigid Formations and Their Applications, IEEE Transactions on Robotics, 32(3) (2016) 684-697.
- [3] G. Antonelli, F. Arrichiello, F. Caccavale, A. Marino, Decentralized Centroid and Formation Control for Multi-Robot Systems, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), (2013) 3511-3516.
- [4] M. Aranda, G. López-Nicolás, C. Sagüés, M. M. Zavlanos, Distributed Formation Stabilization Using Relative Position Measurements in Local Coordinates, IEEE Transactions on Automatic Control, DOI 10.1109/TAC.2016.2527719.
- [5] S. Fuady, A. Ravi, R. Bambang, Distributed Formation Control of Multi-Robot System with Obstacle Avoidance, International Conference on Robotics, Biomimetics, Intelligent Computational Systems (ROBIONETICS) (2013) 94-98.
- [6] Z. Han, L. Wang, Z. Lin, Local Formation Control Strategies with Undetermined and Determined Formation Scales for Co-leader Vehicle Networks, IEEE 52nd Conference on Decision and Control (Dec 2013) 7339-7344.
- [7] J. Jin, Y. Kim, S. Wee, N. Gans, Decentralized Cooperative Mean Approach to Collision Avoidance for Nonholonomic Mobile Robots, IEEE International Conference on Robotics and Automation, (May 2015) 35-41.
- [8] Y.-H. Chang, C.-W. Chang, C.-L. Chen, C.-W. Tao, Fuzzy Sliding-Mode Formation Control for Multirobot Systems: Design and Implementation, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 42(2) (Apr 2012). 444-457.
- [9] R. Cohen, S. Havlin, Complex Networks, Structure, Stability and Function, Cambridge University Press, (2007).
- [10] J. Cao, G. Chen, P. Li, Global Synchronization in an Array of Delayed Neural Networks With Hybrid Coupling, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—part b: Cybernetics, 38(2) (2008) 488-498.
- [11] G. Chen, Pinning Control and Synchronization on Complex Dynamical Networks, International Journal of Control, Automation, and Systems, 12(2) (2014) 221-230.
- [12] X. Guo, J. Li, Stochastic Adaptive Synchronization for Time-Varying Complex Delayed Dynamical Networks with Heterogeneous Nodes, Elsevier Applied Mathematics and Computation 222 (2013) 381-390.
- [13] R. V. D. Hofstad, Random Graphs and Complex Networks, Department of Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology, (2013).
- [14] C. Hu, J. Yu, H. Jiang, Z. Teng, Pinning Synchronization of Weighted Complex Networks with Variable Delays and Adaptive Coupling Weights, Springer Nonlinear Dyn, 67 (2012) 1373-1385.
- [15] W. Yu, G. Chen, J. Lü, J. Kurts, Synchronization Via Pinning Control on General Complex Networks, SIAM J. Control Optimization. 51(2) (2013) 1395-1416.
- [16] G. S. Seyboth, D. V. Dimarogonas, K. H. Johansson, F. Allgöwer, Static diffusive couplings in heterogeneous linear networks, IFAC Proceedings Volumes, 45(26) (2012) 258-263.
- [17] P. Wieland, From Static to Dynamic Couplings in Consensus and Synchronization Among Identical and Non-Identical Systems, Ph. D. Thesis, Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart (2010).
- [18] P. Wieland, F. Allgöwer, On Consensus among Identical Linear Systems using Input-Decoupled Functional Observers, American Control Conference, (Jun 2010) 1641-1646.
- [19] R. Olfati-Saber, R. Murray, Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays, IEEE Transactions on Automatic Control, 49(9) (sep 2004) 1520-1533.
- [20] Q. Song, F. Liu, J. Cao, W. Yu, M-Matrix Strategies for Pinning-Controlled Leader-Following Consensus in Multiagent Systems with Nonlinear Dynamics, IEEE Transactions on Cybernetics, 43(6) (Dec 2013) 1688-1697.
- [21] W. Zhong, G. Liu, C. Thomas, Global Bounded Consensus of Multiagent Systems With Nonidentical Nodes and Time Delays, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 42(5) (Oct 2012) 1480-1488.
- [22] Q. Song, J. Cao, On Pinning Synchronization of Directed and Undirected Complex Dynamical Networks, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, 57(3) (Mar 2010) 672-680.
- [23] F. Bullo, J. Cortés, S. Martínez, Distributed Control of Robotic Networks: a Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms, Princeton University Press. (2009).
- [24] A.Y. Aguilar-Bustos, E. Bugarín, Robot Móvil con Desplazamientos Caóticos Delimitados y Evasión de Obstáculos, XV Congreso Latinoamericano de Control Automático, Lima-Perú (Oct 2012).

- [25] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, (2000).
- [26] A.J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists & Engineers*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). (2005).
- [27] R. Kelly, V. Santibañez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Ed. Pearson Education. Madrid, España. (2003).
- [28] K. Schäcke, *On the Kronecker Product*, Master's Thesis, University of Waterloo, (2004).
- [29] A. Y. Aguilar-Bustos, E. Bugarín, *Robots Móviles en Colaboración con Desplazamientos Caóticos. XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático*, Cancún, Quintana Roo, México, (Oct 2014).
- [30] D. E. Chang, S. C. Shadden, J. E. Marsden, R. Olfati-Saber, *Collision Avoidance for Multiple Agent Systems*, Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii USA, (Dec 2003).
- [31] M. A. El Kamel, L. Beji, A. Abichou, S. Mammar, *A Novel Obstacle Avoidance Approach for Mobile Robot System Including Target Capturing*, Intelligent Systems and Automation, 2nd Mediterranean Conference, (2009) 249-253.
- [32] O. Khatib, *Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots*, The International Journal of Robotics Research, 5(1) (1986) 90-98.
- [33] E. Bugarín, R. Kelly, *RTSVC: Real-Time System for Visual Control of Robots*, Wiley Periodicals, Inc. *Int J Imaging Syst Technol*, Vol. 18, 251–256 (2008).